ALGEBRAICKÉ ÚPRAVY VÝRAZŮ

1. Stanovte hodnotu výrazu $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}$

ŘEŠENÍ

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x+1)^2}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x+1)^2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{4x}{(x+1)^2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{1} * \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{4x}} = \frac{2\sqrt{x}}{1} * \frac{|x+1|}{2\sqrt{x}} =$$

$$= |x+1|$$

Podmínky: $x \neq -1$

2. Stanovte hodnotu výrazu $\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x}-1}$

ŘEŠENÍ

$$\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x}-1} = \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)} \div \frac{1+x-1+x}{1-x} = \frac{4x}{(1-x)(1+x)} * \frac{1-x}{2x} =$$

$$= \frac{2}{(1+x)}$$

Podmínky: $x \neq -1\,, x \neq 1\,, x \neq 0$

3. Stanovte hodnotu výrazu $\frac{\sqrt{2a}-\frac{2a}{a+\sqrt{2a}}}{\frac{\sqrt{2a}-2}{a-2}}$.

ŘEŠENÍ

$$\frac{\sqrt{2a}-\frac{2a}{a+\sqrt{2a}}}{\frac{\sqrt{2a}-2}{a-2}} = \frac{a\sqrt{2a}+2a-2a}{a+\sqrt{2a}} * \frac{a-2}{\sqrt{2a}-2} = \frac{a\sqrt{2a}}{a+\sqrt{2a}} * \frac{a-2}{\sqrt{2a}-2} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2a}(a-2)}{a\sqrt{2a}-2a+2a-2\sqrt{2a}} = \frac{a\sqrt{2a}(a-2)}{a\sqrt{2a}-2\sqrt{2a}} = \frac{a\sqrt{2a}(a-2)}{\sqrt{2a}\,(a-2)} = a$$

Podmínky: $a > 0$; $a+\sqrt{2a} \neq 0 \quad \Rightarrow a(a-2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 2\,,\ a \neq 0$

4. Zjednodušte následující výraz $\frac{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)}$.

ŘEŠENÍ

$$\frac{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2b^2} \div \left[\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)\left(\frac{b^2-2ab+a^2}{b^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2b^2} \div \left[\frac{(b^2+a^2)(b-a)^2}{a^2b^2}\right] =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2b^2} * \left[\frac{a^2b^2}{(b^2+a^2)(b-a)^2}\right] = \frac{(a-b)(a+b)}{(b-a)^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$$

Podmínky: $a \neq 0\,, a \neq b\,, b \neq 0$

5. Zjednodušte následující výraz $6a + \frac{\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}}{\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}}$.

ŘEŠENÍ

$$6a + \frac{\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}}{\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}} = 6a + \frac{a^2+2a-a^2+2a}{(a-2)(a+2)} * \frac{a^3(a-2)+8(a-2)}{4a} =$$

$$= 6a + \frac{4a}{(a-2)(a+2)} * \frac{(a^3+8)(a-2)}{4a} = 6a + \frac{(a^3+8)}{a+2} = 6a + \frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{a+2}$$

$$= 6a + a^2 - 2a + 4 = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$$

Podmínky: $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq 2$

6. Zjednodušte následující výraz $\left(\frac{p\sqrt{p}+q\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} - \sqrt{pq}\right) \div (p-q) + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$.

ŘEŠENÍ

$$\left(\frac{p\sqrt{p}+q\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} - \sqrt{pq}\right) \div (p-q) + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$

$$= \left(\frac{p\sqrt{p}+q\sqrt{q}-p\sqrt{q}-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\right) * \frac{1}{p-q} + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{p}(p-q)+\sqrt{q}(q-p)}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\right) * \frac{1}{p-q} + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})(q-p)}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\right) * \frac{1}{p-q} + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} =$$

$$= \left(\frac{(-1)(\sqrt{p}+\sqrt{q})(-q+p)}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\right) * \frac{1}{p-q} + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \frac{(\sqrt{p}-\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} =$$

$$= \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = 1$$

Podmínky: $p \neq q$, $p \geq 0$, $q \geq 0$

7. Zjednodušte výraz a výsledek vyjádřete pomocí zlomku

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} : \left(\frac{5}{6} + 1{,}5\right).$$

ŘEŠENÍ

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} : \left(\frac{5}{6} + 1{,}5\right) = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} : \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} : \left(\frac{5+9}{6}\right) = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} * \left(\frac{6}{14}\right) = \frac{26}{63}$$

8. Zjednodušte výraz a výsledek vyjádřete pomocí zlomku

$$\frac{2\frac{1}{2}-0{,}7}{\frac{3}{4}}-1\frac{1}{5}.$$

ŘEŠENÍ

$$\frac{2\frac{1}{2}-0{,}7}{\frac{3}{4}}-1\frac{1}{5}=\frac{\frac{18}{10}}{\frac{3}{4}}-\frac{6}{5}=\frac{6}{5}$$

9. Zjednodušte výraz a výsledek vyjádřete pomocí zlomku

$$\frac{\left(\frac{3}{7}-1\frac{1}{2}\right):\frac{3}{8}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2*\left(-\frac{1}{7}\right)}.$$

ŘEŠENÍ

$$\frac{\left(\frac{3}{7}-1\frac{1}{2}\right):\frac{3}{8}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2*\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{\left(-\frac{15}{14}\right):\frac{3}{8}}{-\left(\frac{4}{63}\right)}=45$$

10. Který výraz a) $\sqrt{a^2+b^2}$; b) $\sqrt{(a+b)^2}$; c) $\sqrt{a^2-b^2}$ dosahuje nejnižší hodnoty po dosazení za $a=12,\ \ b=\ -9$.

ŘEŠENÍ

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$

$\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{144-81}=\sqrt{63}$

Jedná se o výraz : $\sqrt{(a+b)^2}$

11. Zjednodušte výraz a výsledek vyjádřete pomocí zlomku.

$$\left[18 - 12 * \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)\right] : \frac{16}{5}\,.$$

ŘEŠENÍ

$$\left[18 - 12 * \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)\right] : \frac{16}{5}$$

$$= \left[18 - 12 * \left(\frac{5-4}{6}\right)\right] * \frac{5}{16} = [18 - 2] * \frac{5}{16} = 5$$

12. Určete druhou mocninu čísla „a“ a výsledek zapište smíšeným zlomkem, když víte, že

$$a = \left[\left(\frac{1}{6} - 1\,\frac{1}{3}\right) : \frac{2}{3} + \frac{5}{8}\right] : 0{,}25\,.$$

ŘEŠENÍ

$$a = \left[\left(\frac{1}{6} - 1\,\frac{1}{3}\right) : \frac{2}{3} + \frac{5}{8}\right] : 0{,}25 = \left[-\frac{7}{4} + \frac{5}{8}\right] * \frac{4}{1} = -\frac{9}{2}$$

$$a^2 = \frac{81}{4} = 20\,\frac{1}{4}$$

- VYJADŘOVÁNÍ NEZNÁMÉ ZE VZORCE

13. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*p*“

$\frac{a+3p}{q} = 5 - a.$

ŘEŠENÍ

$$\frac{a+3p}{q} = 5 - a \ \ /q$$

$$a + 3p = 5q - aq$$

$$p = \frac{5q - aq - a}{3}$$

14. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*a*“

$\frac{a+3p}{q} = 5 - a.$

ŘEŠENÍ

$$\frac{a+3p}{q} = 5 - a \ \ /q$$

$$a + 3p = 5q - aq$$

$$a + aq = 5q - 3p$$

$$a = \frac{5q - 3p}{1 + q}$$

15. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*q*“

$\frac{a+3p}{q} = 5 - a.$

ŘEŠENÍ

$$\frac{a+3p}{q} = 5 - a \ \ /q$$

$$a + 3p = 5q - aq \qquad\qquad q = \frac{a + 3p}{5 - a}$$

16. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*y*“

$x = z - \frac{z-y}{z+y}$.

ŘEŠENÍ

$x(z+y) = z^2 + zy - z + y$

$xy - zy - y = z^2 - z - xz$

$$y = \frac{z^2 - z - xz}{x - z - 1}$$

17. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*r*“

$F = \frac{e^2}{4ar^2}$.

ŘEŠENÍ

$F4ar^2 = e^2$

$$r = \sqrt{\frac{e^2}{F4a}} = \frac{e}{2\sqrt{Fa}}$$

18. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*b*“

$P = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

ŘEŠENÍ

$2P = a^2 + b^2 + c^2$

$b = \sqrt{2P - a^2 - c^2}$

19. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*r*“

$V = \frac{3}{4}\pi r^3$.

ŘEŠENÍ

$$V = \frac{3}{4}\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{4}{3\pi}V$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}V}$$

20. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*c*“

$f = \frac{(a-c)(b-d)}{ac-bd}$.

ŘEŠENÍ

$$fac - fbd = ab - ad - cb + cd$$

$$fac + cb - cd = ab - ad + fbd$$

$$c = \frac{ab - ad + fbd}{fa + b - d}$$

21. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*u*“

$t = \sqrt{u^2 + v^2}$.

ŘEŠENÍ

$$t = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$t^2 = u^2 + v^2$$

$$|u| = \sqrt{t^2 - v^2} \;\ldots u = \sqrt{t^2 - v^2},\; u = -\sqrt{t^2 - v^2}$$

22. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*a*“

$c^3 = (a-b)^2$.

ŘEŠENÍ

$$c^3 = (a-b)^2$$

$$\sqrt{c^3} = a - b$$

$$a = \sqrt{c^3} + b$$

23. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*x*“

$y = e^{x+7}$.

ŘEŠENÍ

$y = e^{x+7}$ … zlogaritmování přirozeným logaritmem

$\ln y = (x+7)\ln e$ ln(e) = 1

$x = \ln y - 7$

24. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*x*“

$y = 2^{7x-3}$.

ŘEŠENÍ

$y = 2^{7x-3}$ … zlogaritmování logaritmem při základu 2

$\log_2 y = (7x-3)\log_2 2$ ... $\log_2 2 = 1$

$x = \frac{\log_2 y + 3}{7}$

25. Vyjádřete z následujícího vzorce proměnnou „*t*“

$t^{-1} + z = 2.$

ŘEŠENÍ

$\frac{1}{t} + z = 2 \;\; /* \, t$

$1 + zt = 2t$

$-2t + zt = -1$

$t(-2+z) = -1 \;\; /(-2+z)$

$t = -\frac{1}{-2+z} = \frac{1}{z-2}$

ROVNICE A NEROVNICE

26. Určete množinu všech řešení nerovnice $\frac{3x-1}{1-x} < 1$.

ŘEŠENÍ

$$\frac{3x-1}{1-x} - 1 < 0$$
$$\frac{3x-1-1+x}{1-x} < 0$$
$$\frac{4x-2}{1-x} < 0$$

Nulové body: $x = \frac{1}{2} \ldots čitatel, x = 1 \ldots jmenovatel$

	$(-\infty;\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2};1)$	$(1;\ \infty)$
4x-2	-	+	+
1-x	+	+	-
celkem	**-**	+	**-**

$$x \in (-\infty;\frac{1}{2})\ \mathrm{U}\ (1;\ \infty)$$

27. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $|2-x| + |3x-2| > 4x$.

ŘEŠENÍ

Nulové body v absolutních hodnotách: $x = 2$, $x = \frac{2}{3}$

	$(-\infty;\frac{2}{3}\rangle$	$\langle\frac{2}{3};\ 2\rangle$	$\langle 2, \infty)$
2-x	+	+	-
3x-2	-	+	+
	1)	2)	3)

1)

$$+(2-x)+(-)(3x-2)>4x$$
$$2-x-3x+2>4x$$

$$4>4x+4x$$

$$4>8x$$
$$\frac{1}{2}>x$$

Dílčí výsledek:

$$\left(-\infty;\frac{2}{3}\right\rangle$$

2)

$$+(2-x)+(+)(3x-2)>4x$$
$$2-x+3x-2>4x$$

$$0>4x-2x$$

$$0>2x$$
$$0>x$$

Dílčí výsledek:

$$x\in\ \{\emptyset\}$$

3)

$$-(2-x)+(+)(3x-2)>4x$$
$$-2+x+3x-2>4x$$

$$-4>4x-4x$$

$$-4>0x$$
$$N\text{Ř}$$

28. V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic $2x-1<-3$
$3x+10>1$

ŘEŠENÍ

I.

$$2x-1<-3$$

$$2x < -2$$
$$x < -1$$

II.

$$3x + 10 > 1$$
$$3x > -9$$
$$x > -3$$

Z obou výsledků vytvoříme průnik, tj. výsledný interval řešení soustavy nerovnic je roven

$$(-3;\ -1)$$

29. Pro všechny $x \in R, y \in R/\{0\}$ je dána soustava rovnic (viz níže), určete řešení této soustavy rovnic.

$$\frac{x}{y} = 4$$
$$2x - 5y = -3$$

ŘEŠENÍ

Metoda dosazovací

$$\frac{x}{y} = 4 \quad \ldots.\, x = 4y$$
$$2x - 5y = -3$$

$$2(4y) - 5y = -3$$
$$8y - 5y = -3$$
$$3y = -3$$
$$y = -1$$

$$x = 4y \qquad \ldots. \qquad x = 4 * (-1) = -4$$

Výsledné řešení lze zapsat jako vektor řešení soustavy rovnic

$$\vec{x} = (-4;\ -1)$$

30. Neznámé číslo nejprve zmenšíme o třetinu své hodnoty, poté ještě o 40. Po vynásobení výsledku dvěma získáme původní neznámé číslo. Určete neznámé číslo.

ŘEŠENÍ

x … je neznámé číslo

$$\left(x - \frac{1}{3}x - 40\right) * 2 = x$$

$$2x - \frac{2}{3}x - 80 = x$$

$$\boldsymbol{x = 240}$$

31. Pan Vlk má dvě zaměstnání. V prvním zaměstnání vydělává 400 Kč za hodinu, ve druhém 300 Kč za hodinu. V prvním zaměstnání stráví týdně o 10 hodin více než ve druhém a vydělá si tam za týden dvakrát více. Určete, kolik hodin týdně stráví pan Vlk v prvním zaměstnání.

ŘEŠENÍ

x … počet hodin strávených ve druhém zaměstnání

$$400(x + 10) = 300 * 2 * x$$

$$4000 = 200x$$

$$x = 20$$

V prvním zaměstnání stráví

$$x + 10 = 20 + 10 = \boldsymbol{30\ hodin}$$

32. Za nákup 2,5 kg meruněk a 1,5 kg broskví se zaplatilo celkem 85 Kč. Kilo broskví je o 2 koruny levnější než kilo meruněk. Určete, kolik korun se zaplatilo za meruňky.

ŘEŠENÍ

x …cena meruněk

$$2{,}5x + 1{,}5 * (x - 2) = 85$$

$$4x = 88$$

$$x = 22$$

Cena meruněk činí 22 Kč.

33. Anežka nasbírá kbelík borůvek za dvě hodiny. Pepa za každou hodinu naplní jednu třetinu kbelíku. Oba pracují rovnoměrným tempem. Za jak dlouho by společně naplnili až po okraj jeden kbelík?

ŘEŠENÍ

Anežka …… 2h …. 1 kbelík

Pepa ……….1h ….. $\frac{1}{3}$ kbelíku

Anežka ….. 1h ….. $\frac{1}{2}$ kbelíku

Pepa ……….1h ….. $\frac{1}{3}$ kbelíku

Za jednu hodinu nasbírají $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\ kbelíku$

Zbývá nasbírat $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\ kbelíku$

Víme, že $1h=\frac{5}{6}kbelíku\ \dots\dots.\frac{1}{5}h=\frac{1}{6}kbelíku$

Celkem $1h+\frac{1}{5}h=1\ \frac{1}{5}h\ nasbírají\ oba\ jeden\ kbelík.$

34. Martin byl s cestovní agenturou na několika denním putování. Za rok tuto cestu zopakoval, ale cestoval soukromě s přítelkyní. Cestování však pojal odlišně než prvně s agenturou. Pro každý den si naplánovali stejně dlouhé úseky, v průměru o desetinu kratší než byla průměrná denní trasa s agenturou. Proto jejich putování trvalo o dva dny déle. Určete, kolik dní cesta trvala s agenturou.

ŘEŠENÍ

Putování s agenturou ….. x

Denní putování s agenturou ….. $\frac{1}{x}$

Putování s přítelkyní …….. x + 2

Denní putování s přítelkyní …. $\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}*\frac{1}{10}\right)$

$$(x+2)*\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{10x}\right)=x*\frac{1}{x}$$

$$9x+18=10x$$

$$x=18$$

Cesta s agenturou trvala 18 dní.

35. Bořek, Adam a Cyril spořili na společný dar. Bořek uspořil 11 000 Kč a Cyril třetinu aritmetického průměru úspor Adama a Bořka. Všichni chlapci dohromady uspořili třikrát více než samotný Adam. Určete, kolik korun uspořil Adam a Cyril.

ŘEŠENÍ

Adam …. x Kč uspořil

Bořek ….. 11 000 Kč uspořil

Cyril …… $\frac{1}{3}\left(\frac{x+11\ 000}{2}\right)$

$$11\,000 + a + \frac{1}{3}\left(\frac{x + 11\,000}{2}\right) = 3 * x$$

$$77\,000 = 11x$$

$$x = 7\,000$$

Adam uspořil …. 7 000Kč

Cyril uspořil ….. $\frac{1}{3}\left(\frac{7\,000+11\,000}{2}\right) = 3\,000\ Kč$

36. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$.

ŘEŠENÍ

Podmínky řešitelnosti: $x \geq -2 \quad \wedge \quad x \geq 2 \quad \wedge \quad x \geq -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}\ /^2$$

$$\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3}\right)^2$$

$$x + 2 + 2 * \sqrt{(x+2)(x-2)} + x - 2 = 2x + 3$$

$$2 * \sqrt{(x+2)(x-2)} = 3/^2$$

$$4 * (x+2)(x-2) = 9$$

$$x^2 - 4 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$|x| = \frac{5}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} \quad \textit{vyhovuje podmínce} \qquad x_2 = -\frac{5}{2} \quad \textit{nevyhovuje podmínce}$$

Výsledek: $x_1 = \frac{5}{2}$

37. V oboru reálných čísel řešte rovnici $(4y-5)(6+3y) = 8y * (y-2) - 5 + 4y^2$.

ŘEŠENÍ

$(4y-5)(6+3y) = 8y * (y-2) - 5 + 4y^2$

$9y - 30 = -16y - 5$

$y = 1$

38. Stanovte všechny reálné hodnoty parametru t, pro které má rovnice $(t+2)x^2-3(3t-2)x+5t-1=0$ dvojnásobný kořen.

ŘEŠENÍ

Diskriminant D této rovnice musí být roven nule.

$D=9(3t-2)^2-4(t+2)(5t-1)= =9(9t^2-12t+4)-4(5t^2+9t-2)=61t^2-144t+44=0$

… kvadratická rovnice

Zde opět $D=20736-10736=10000$ …. $t_{1,2}=\dfrac{144\pm100}{122}$, $t_1=2$, $t_2=\dfrac{22}{61}$.

39. Je dána kružnice k o rovnici $x^2+y^2-16x+60=0$ a přímka p o rovnici $2x+y-a=0$. Pro jaké a je přímky p tečnou kružnice k.

ŘEŠENÍ

Řešení rovnic $x^2+y^2-16x+60=0$ a $2x+y-a=0$ musí být právě jedno, tj. kvadratická rovnice $x^2+(a-2x)^2-16x+60=0$ musí mít diskriminant D=0.

$5x^2-(4a+16)x+60+a^2=0$

$D=(4a+16)^2-20(60+a^2)=-a^2+32a-236=0$.

Řešením kvadratické rovnice dostaneme $a_{1,2}=\dfrac{-32\pm\sqrt{80}}{-2}=16\mp2\sqrt{5}$.

Pro $a_1=16-2\sqrt{5}$ resp. $a_2=16+2\sqrt{5}$ je přímka o rovnici $2x+y-a_1=0$ resp. $2x+y-a_2=0$ tečnou kružnice o rovnici $x^2+y^2-16x+60=0$.

40. Stanovte průsečíky kružnice k o rovnici $x^2+y^2-6x+4y=12$ a přímky p o rovnici $y-2x-3=0$.

ŘEŠENÍ

$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=12+13=25$, $(x-3)^2+(y+2)^2=5^2$,

kružnice k má střed $S[3,-2]$ a poloměr $r=5$.

Průsečíky:

$(x-3)^2+(2x+3+2)^2=25$

$5x^2+14x+9=0$

$D=196-180=16$

$x_{1,2}=\dfrac{-14\pm 4}{10}.$

$x_1=-1,\ y_1=-2+3=1,\quad x_2=-\dfrac{9}{5},\ y_2=-\dfrac{18}{5}+\dfrac{15}{5}=-\dfrac{3}{5}.$

Průsečíky: $A[-1,+1],\quad B\left[-\dfrac{9}{5},-\dfrac{3}{5}\right].$

41. Řešte v oboru R následující rovnici $\frac{1}{2x-4}+\frac{1-x}{x^2-2x}=\frac{1}{2}$.

ŘEŠENÍ

Podmínky: $x\neq 2,\ \ x\neq 0$

$$\frac{1}{2x-4}+\frac{1-x}{x^2-2x}=\frac{1}{2}\quad /2x(x-2)$$

$$x+2*(1-x)=x^2-2x$$

$$0=x^2-x-2$$

$$0=(x-2)(x+1)$$

$$x_1=2\ \ \textit{nevyhovuje podmínce}\qquad x_2=-1\ \ \textit{vyhovuje podmínce}$$

42. Řešte logaritmickou rovnici $\dfrac{\log_{10}2x}{\log_{10}(4x-15)}=2$.

ŘEŠENÍ

Podmínky: $2x>0\quad\wedge\quad 4x-15>0\quad\Rightarrow\quad x>\frac{15}{4}$

$$\frac{\log_{10}2x}{\log_{10}(4x-15)}=2$$

$$\log_{10}2x=2\log_{10}(4x-15)$$

$$\log_{10}2x=\log_{10}(4x-15)^2$$

$$2x=(4x-15)^2$$

$$2x=16x^2-120x+225$$

$$0 = 16x^2 - 122x + 225$$
$$D = (-122)^2 - 4 * 225 * 16 = 484$$

$$x_1 = \frac{122 + 22}{32} = \frac{9}{2} \quad \textit{vyhovuje podmínce}$$
$$x_2 = \frac{122 - 22}{32} = \frac{25}{8} \quad \textit{nevyhovuje podmínce}$$

43. Vhodnou substitucí řešte exponenciální rovnici $3.9^{2x} - 9^{x+2} - 9^{x-1} + 3 = 0$.

ŘEŠENÍ

Substituce: $9^x = z$

$3z^2 - 9^2 z - 9^{-1} z + 3 = 0$

$3z^2 - \frac{730}{9} z + 3 = 0$

$D = \frac{730^2}{9^2} - 36 = \frac{529984}{81}$, $\sqrt{D} = \frac{728}{9}$,

$z_{1,2} = \frac{\frac{730}{9} \pm \frac{728}{9}}{6}$, $z_1 = 27$, $z_2 = \frac{2}{54}$;

$9^x = 27$,

$3^{2x} = 3^3$, $2x = 3$, $x_1 = \frac{3}{2}$

$9^x = \frac{1}{27}$, $3^{2x} = 3^{-3}$, $2x = -3$, $x_2 = -\frac{3}{2}$

44. Řešte v oboru reálných čísel následující exponenciální rovnici

$$16 * 2^{x+1} = 4 * 8^x$$

ŘEŠENÍ

$$16 * 2^{x+1} = 4 * 8^x$$
$$2^4 * 2^{x+1} = 2^2 * 2^{3x}$$
$$2^{x+1+4} = 2^{3x+2}$$
$$x + 5 = 3x + 2$$
$$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$$

45. Celé číslo a umocněné svým logaritmem o základu 10 je rovno 10^4. Jaké je a?

ŘEŠENÍ

$a^{\log_{10} a} = 10^4$, $(\log_{10} a)^2 = 4$, $\log_{10} a = 2$, $a_1 = 10^2$; $\log a_{10} = -2$, $a_2 = 10^{-2}$.

Číslo a_2 není celé. Řešením úlohy je $a = 100$.

46. Číslo a umocněné svým logaritmem o základu 10 je rovno desetině kvadrátu tohoto čísla. Jaké je číslo a?

ŘEŠENÍ

$a^{\log_{10} a} = \dfrac{a^2}{10}$, $(\log_{10} a)^2 = 2\log_{10} a - \log_{10} 10$, $(\log_{10} a - 1)^2 = 0$, $\log_{10} a = 1$.

Řešením je $a = 10$.

PLANIMETRIE, STEREOMETRIE

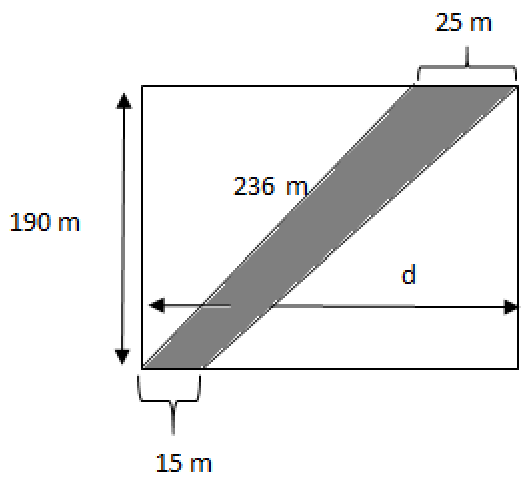
47. Obvod obdélníka je 14 (j), úhlopříčka je 5(j). Určete obsah tohoto obdélníka.

ŘEŠENÍ

Nechť a a b jsou velikosti stran obdélníka. Pak $2(a+b)=14$, z Pythagorovy věty je $a^2+b^2=5^2$, $a^2+(7-a)^2=25$, $a^2-7a+12=0$, $a_{1,2}=\dfrac{7\pm 1}{2}$.

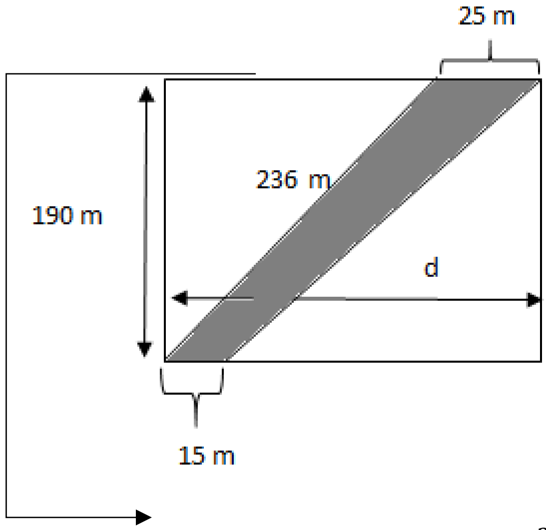
Řešení: $a_1=4$, $b_1=7-a_1=3$; $a_2=3$, $b_2=4$.

48. Pozemek tvaru obdélníku je dočasně přerušen stavebním záborem (šedá plocha). Rovnoběžné hranice záboru na obvodu pozemku jsou dlouhé 15 m a 25m. Jedna šikmá strana záboru, která je oplocena, má délku 236 m. Nyní se pokračuje v oplocování druhé strany záboru. Vypočtěte obsah plochy stavebního záboru. Výpočty zaokrouhlete na jednotky.



ŘEŠENÍ

Je nutné určit délku druhé strany záboru: pomocí Pythagorovy věty. K tomu ale musíme znát velikost druhé strany pozemku - jedna je známá, a to 190 m. Toto určíme opět pomocí Pythagorovy věty.



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$236^2 = 190^2 + b^2$$
$$b^2 = 139{,}99 \cong 140\ m$$

Druhá strana pozemku je dlouhá: $140 + 25 = 165\ m$.

Výpočet druhé strany záboru:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 190^2 + (165 - 15)^2$$
$$c^2 = 58\ 600$$
$$c = 242\ m$$

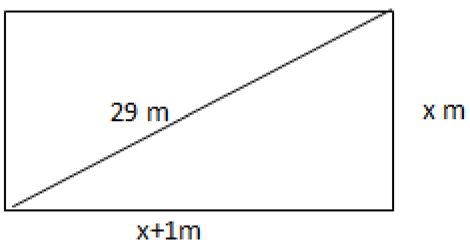
Obsah plochy záboru:

Obsah celého pozemku (tj. obsah obdélníku) mínus obsahy pravoúhlých trojúhelníků.

$$S(záboru) = S(obdélníku) - S(trojúhelník\ 1) - S(trojúhelník\ 2)$$
$$S = 190 * 165 - \frac{190 * 140}{2} - \frac{190 * 150}{2}$$
$$S = 31\ 350 - 13\ 300 - 14\ 250 = \mathbf{3\ 800} \boldsymbol{m^2}$$

49. Okrasná část zahrady má tvar obdélníku, jehož rozměry se liší o jediný metr. Po úhlopříčce dlouhé 29 m vede pěšinka. Určete obvod okrasné zahrady.

ŘEŠENÍ



x … rozměr jedné strany v m

x + 1 … rozměr druhé strany zvětšený o 1 m (v m)

řešení pomocí Pythagorovy věty

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$29^2 = x^2 + (x+1)^2$$

$$29^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 + 2x - 840 = 0 \ \ /2$$

$$x^2 + x - 420 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{(1*1) - 4*(-420)*1}}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{(1*1) - 4*(-420)*1}}{2}$$

$$= -21 \ldots nevyhovuje, rozměr\ nemůže\ být\ záporný$$

$$a = \ x = 20\ m$$

$$b = x = 20 + 1 = 21\ m$$

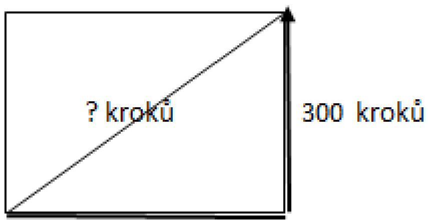
Obvod zahrady:

$$O = 2*(a+b)$$

$$O = 2*(21+20) = 2*41 = \mathbf{82\ m}$$

50. Čtvercový travnatý pozemek se obchází po dvou stranách jeho obvodu celkem třemi sty kroky. Neukázněný chodec dostal pokutu za to, že pozemek přešel po úhlopříčce. Vypočtěte, kolik kroků neukázněný chodec ušetřil. Výsledek zaokrouhlete na jednotky.

ŘEŠENÍ



Řešení pomocí Pythagorovy věty: a = 300/2 = 150 kroků jedna strana čtverce

$$c^2 = a^2 + b^2$$

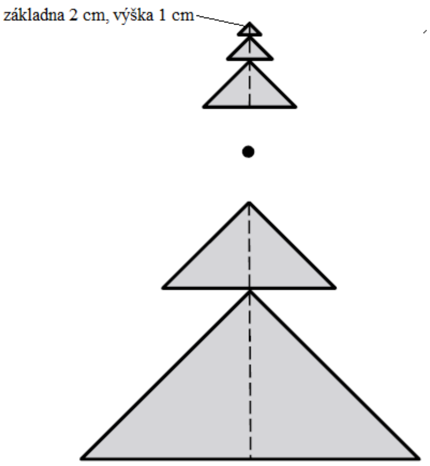
$$c^2 = 150^2 + 150^2 = 2*150^2$$

$$c = \sqrt{2}*150\ \ kroků$$

Chodec ušetřil:

$$300 - \sqrt{2} * 150 \cong \mathbf{88\ krok}ů$$

51. Mějme obrazec, který je sestaven z 6 podobných rovnoramenných trojúhelníků. Sousední trojúhelníky mají vždy jeden společný bod a jejich výšky na základnu leží na téže přímce. Nejmenší trojúhelník má délku základy 2 cm a velikost výšky na základnu 1 cm. Každý další trojúhelník má uvedené rozměry dvakrát větší než předchozí trojúhelní. Vypočtěte obsah největšího trojúhelníku.



ŘEŠENÍ

Velikost základny = $2^6 = 64$ cm
Velikost výšky = $2^5 = 32$ cm

$$S = \frac{a * va}{2}$$
$$S = \frac{64 * 32}{2} = \mathbf{1\,024\ cm^2}$$

52. Bazén tvaru kvádru má výšku 2,5 m. Objem bazénu je 150 m^3. Víme, že délky stran dna se liší o 4 m. Vypočítejte délky stran dna bazénu.

ŘEŠENÍ

Objem kvádru: $V = a * b * c$

Dno kvádru je obdélník se stranami: a = x, b = x+4

$V = a * b * c$

$150 = x * (x + 4) * 2{,}5$ … kvadratická rovnice:

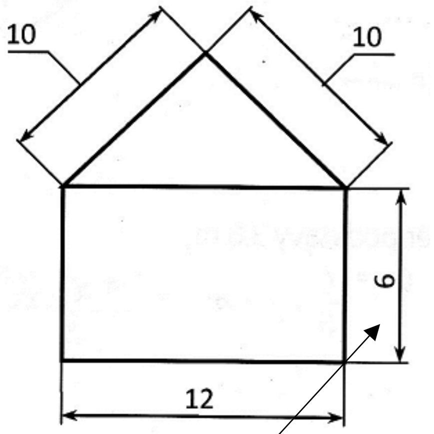
$0 = 2{,}5x^2 + 10x - 150$

$x = 6$

$x = -10 \quad \notin kladné\ R \ldots nelze\ brát\ za\ řešení$

Délky stran dna bazénu: a = 6 m, b = 10 m.

53. Jak vysoký je dům daných rozměrů znázorněných na obrázku?



ŘEŠENÍ

Střecha je rovnoramenný trojúhelník – půlka … pravoúhlý trojúhelník s přeponou 10(j) a podstavou 12/2 = 6 (j). Pro určení délky odvěsny využijeme Pythagorovu větu:

$b = \sqrt{10^2 - 6^2}$

$b = 8\ (j)$

Dům je vysoký 8 (j) + 6 (j) = 14 (j).

54. Kolik místa zabere na polici akvárium tvaru krychle, vejde-li se do něj 27 l vody?

ŘEŠENÍ

Objem krychle $V = a * a * a = a^3$

$27\ (dm^3) =\ a^3$

$a\ \ = 3\ (dm)$

Obsah podstavy akvária = obsah čtverce o hraně 3 dm …. $S = a * a = 3 * 3 = 9\ dm^2$

Akvárium zabere 9 dm^2 , resp. 0,09 m^2 místa na polici.

55. Velikost hrany krychle je 122 cm. Vešlo by se do této krychle 21 hl vody?

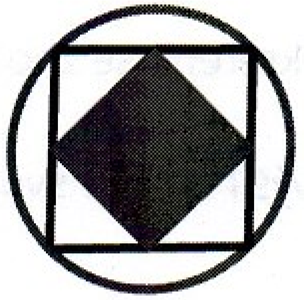
ŘEŠENÍ

21hl = 2 100 l = 2 100 dm^3 = 2 100 000 cm^3

$V = a * a * a = 122 * 122 * 122 = 1\ 815\ 848$ cm^3

Ano, vešlo by se 21 hl do této krychle.

56. Je-li průměr kružnice na obrázku 100 mm, jaký je obsah malého čtverce?



ŘEŠENÍ

Strana vepsaného čtverce (většího) … Pythagorova věta – hledáme odvěsnu (pozn. odvěsny jsou stejně dlouhé), přepona je rovna průměru kružnice: 100 mm = 1 dm

$a = \sqrt{\frac{1^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dm

Strana malého čtverce je rovna polovině strany čtverce většího … a* = $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Obsah malého čtverce = $S = a * a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ dm^2 = 25\ cm^2$

57. Na katastrální mapě (měřítko 1 : 1000) je zakreslen pozemek rozměru 5,2 x 3,8 cm. Jaká je výměra tohoto pozemku v ha?

ŘEŠENÍ

1 cm … ve skutečnosti 1 000 cm = 10 m

Strana a = 5,2 cm = 5,2 * 10 = 52 m   strana b = 3,8 cm = 3,8 * 10 = 38 m

Obsah pozemku = obsah obdélníku $S = a * b = 38 * 52 = 1\,976\ m^2 = 0{,}1976\ ha$

Pozemek má výměru 0,1976 ha.

58. Nádoba je naplněna do $\frac{1}{3}$ svého objemu vodou. Odlijete-li 7 l vody, bude naplněna do $\frac{1}{4}$ svého objemu. Jaký je celkový objem nádoby? Vyjádřete daný objem v m^3.

ŘEŠENÍ

$\frac{1}{3}V - 7 = \frac{1}{4}V$

$\frac{1}{3}V - \frac{1}{4}V = 7 \ldots /12$

$4V - 3V = 7 * 12$

$V = 84\, l\ (dm^3) = 0{,}084\ m^3$

Objem nádoby je 0,084 m^3.

59. Rodina spotřebuje za rok přibližně 300 kg brambor. Jakou šířku musí mít obdélníkové pole délky 20 m, aby na něm bylo možno vypěstovat potřebné množství brambor? Předpokládaná úroda se odhaduje 30t na 1 ha.

ŘEŠENÍ

30 t na 1 ha = 10 000 m^2

10 000 m^2 vynese 30 t brambor … 1m^2 vynese 0,003 t brambor, resp. 3 kg brambor

Rodina potřebuje 300 kg … tedy výměra pole musí být 3 * 100 = 100 m^2

Pole je čtverec … $S = a * b$ ... $100 = 20 * x$

$$x = \frac{100}{20} = 5\ m$$

Pole musí mít šířku přibližně 5 m.

ARITMETICKÁ A GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

60. Mezi čísla 1 a 105 bylo vloženo 25 čísel tak, že vznikne aritmetická posloupnost. Stanovte součet prvních deseti členů této posloupnosti.

ŘEŠENÍ

$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + d,\ \ldots,\ a_{26} = 1 + 25d,\ a_{27} = 1 + 26d = 105,\ d = 4,\ s_{10} = \frac{10}{2}(1 + 1 + 9 \cdot 4) = 190.$

61. V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ určete a_1 a součet prvních pěti členů s_5 této posloupnosti, víte-li, že $27a_4 = -16$ a pro kvocient je $3q = 2$.

ŘEŠENÍ

$a_4 = a_1 q^3,\ -\frac{16}{27} = a_1 \frac{8}{27},\ a_1 = -2.$

$$s_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = (-2)\frac{(\frac{2}{3})^5 - 1}{\frac{2}{3} - 1} = -\frac{422}{81}.$$

62. Odečtením čísla x od čísel 3, 10, 23 dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Stanovte první člen a_1 a kvocient q této posloupnosti.

ŘEŠENÍ

$a_1 = 3 - x,\ a_2 = 10 - x,\ a_3 = 23 - x;\quad a_2 = a_1 q,\quad a_3 = a_1 q^2$

$10 - x = (3 - x)q,\qquad 23 - x = (3 - x)q^2;\qquad q = \frac{10 - x}{3 - x},\qquad 23 - x = (3 - x)\frac{(10 - x)^2}{(3 - x)^2},$

$(23 - x)(3 - x) = (10 - x)^2,\ -6x = 31,\quad x = -\frac{31}{6},\ q = \frac{10 + \frac{31}{6}}{3 + \frac{31}{6}} = \frac{91}{49},\ a_1 = 3 + \frac{31}{6} = \frac{49}{6}.$

63. V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je $12a_1 = 1$ a $q = 3$. Stanovte index n, pro který platí $a_n + a_{n+2} = 67{,}5$.

ŘEŠENÍ

$a_n = a_1 q^{n-1}$, $\frac{1}{12}3^{n-1} + \frac{1}{12}3^{n+1} = 67{,}5$, $3^{n-1}(1+3^2) = 810$, $3^{n-1} = 81 = 3^4$, $n-1 = 4$, $n = 5$

.

64. Osm čísel tvoří aritmetickou posloupnost. Určete je, pokud víte, že součet prostředních členů je 41 a součin krajních je 114.

ŘEŠENÍ

$a_4 + a_5 = 41$

$a_1 * a_8 = 114$

$a_1 + 3d + a_1 + 4d = 41$

$(a_1) * (a_1 + 7d) = 114$

$2a_1 + 7d = 41$ … $d = \frac{41}{7} - \frac{2a_1}{7}$

$(a_1{}^2 + 7da_1) = 114$

$a_1{}^2 + 7\left(\frac{41}{7} - \frac{2a_1}{7}\right)a_1 = 114$

$a_1{}^2 - 41a_1 \quad + 114 = 0$ … řešením je kvadratická rovnice

$a_1 = 38$ $\qquad$ … $d = -5$

$a_1 = 3$ $\qquad$ … $d = 5$

Posloupnost 8 členů: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38

65. Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Delší odvěsna má 24 cm. Vypočítejte obvod trojúhelníku.

ŘEŠENÍ

Strana a = $a_1 = 24 - d$

Strana b = $a_2 = 24$

Strana c = $a_3 = 24 + d$

K řešení využijeme Pythagorovu větu:

$(24 + d)^2 = 24^2 + (24 - d)^2$

$d = 6\ cm$

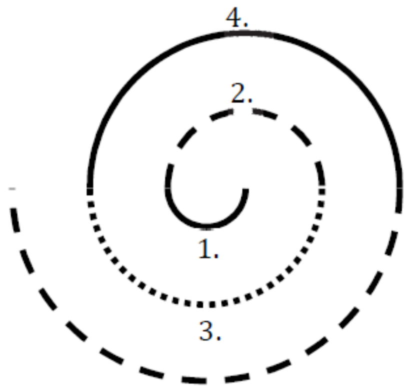
Strana a = $a_1 = 24 - 6$ = 18 cm

Strana b = $a_2 = 24$ cm

Strana c = $a_3 = 24 + 6$ = 30 cm

Obvod trojúhelníku: $O = a + b + c = 18 + 24 + 30 = 72\ cm$

66. V zámecké dlažbě byla vytvořena spirála, jejíž část je znázorněna na níže uvedeném obrázku. Spirála je složena z 15 navazujících půlkružnic. Délka první půlkružnice je 22 dm a každá následující půlkružnice je o 22 dm delší. Uveďte v metrech délku celé spirály. Pozn. Obrázek je pouze ukázkou dané spirály, nikoliv celé.



ŘEŠENÍ

Aritmetická posloupnost

$$a_1 = 22\ dm$$

$$d = 22\ dm$$

$$S_{15} = ? \qquad S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) * 15}{2}$$

$$S_{15} = \frac{(22 + (22 + 14 * 22)) * 15}{2} = (22 + 330) * \frac{15}{2} = 2\,640\ dm = \mathbf{264\ m}$$

67. Aritmetická posloupnost obsahuje 50 členů, z nichž první tři jsou -140; -132; -124 a poslední tři 236; 244; 252. Určete, kolikátým členem posloupnosti je číslo 100.

ŘEŠENÍ

$$a_n = 100, \qquad n = ?$$
$$a_1 = -140$$
$$d = a_2 - a_1 = -132 - (-140) = 8$$
$$a_n = a_1 + (n-1) * d$$
$$100 = -140 + (n-1) * 8$$
$$\boldsymbol{n = 31}$$

68. Počítač byl pořízen za 10 000Kč. Každým následujícím rokem se z ceny počítače odepisuje vždy stejné procento ceny z předchozího roku. Po čtyřech letech se hodnota počítače sníží přibližně na 1 300Kč. Kolik procent se každým rokem odepisuje z ceny počítače? Výsledek uveďte s přesností na jednotky procent.

ŘEŠENÍ

Cena PC ………………..…. 10 000Kč

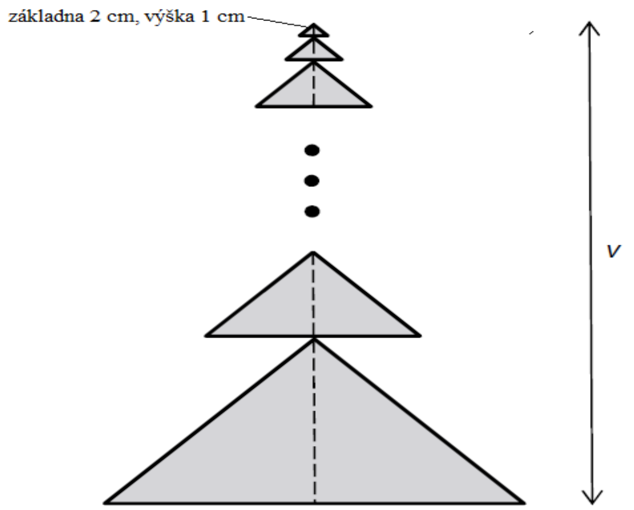
Cena PC po čtyřech letech …. 1 300Kč

Jedná se o geometrickou posloupnost.

$$a_1 = 10\,000$$
$$a_5 = 1\,300$$
$$a_n = a_1 * q^{n-1}$$
$$1\,300 = 10\,000 * q^4$$
$$q \cong 0{,}60$$

Výsledek: 1-0,60 = 0,40 ….. tj. 40%

69. Mějme obrazec, který je sestaven z 18 podobných rovnoramenných trojúhelníků. Sousední trojúhelníky mají vždy jeden společný bod a jejich výšky na základnu leží na téže přímce. Nejmenší trojúhelník má délku základy 2 cm a velikost výšky na základnu 1 cm. Každý další trojúhelník má uvedené rozměry dvakrát větší než předchozí trojúhelní. Vypočtěte výšku „v“ (v cm) celého obrazce.



ŘEŠENÍ

„v“ se určí jako součet 18-ti výšek rovnoramenných trojúhelníků. Jedná se o geometrickou posloupnost.

$$q = 2,\ \ a_1 = 1$$

$$S_{18} = a_1 * \frac{q^{18} - 1}{q - 1}$$

$$S_{18} = 1 * \frac{2^{18} - 1}{2 - 1} = \boldsymbol{2^{18} - 1\ cm = 262\ 143\ cm}$$

SLOVNÍ ÚLOHY

70. Auto vyjíždělo na cestu s polovinou nádrže. Po 100 kilometrech jízdy zbývala ještě třetina nádrže a při příjezdu do cíle jen pětina nádrže. Množství spotřebovaného paliva v nádrži je přímo úměrné ujeté vzdálenosti. Určete, kolik kilometrů auto ujelo.

ŘEŠENÍ

Start …………………………… $\frac{1}{2}$ nádrže

Po 100 km jízdy ………………. $\frac{1}{3}$ nádrže

Příjezd ………………………… $\frac{1}{5}$ nádrže

Spotřeba po prvních 100 km jízdy

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + x$$

$$x = \frac{1}{6}$$

100 km …….. $\frac{1}{6}$ nádrže

Spotřeba od prvních 100 km do cíle

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + x$$
$$x = \frac{2}{15}$$

- výpočet najetých kilometrů

$$\frac{1}{6} * x = \frac{2}{15}$$
$$x = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{5} * 100 = 80$$

Celkový počet najetých km

$$100\ km + 80\ km = \mathbf{180\ km}$$

71. Podle jízdního řádu má být vlak za 10 minut ve stanici. K nádraží mu zbývá 32 km jízdy. Vlak za každé 2 minuty ujede 3 kilometry kromě posledního dvoukilometrového úseku, který mu trvá 5 minut. Jaké předpokládané zpoždění se objeví na nádražní informační tabuli?

ŘEŠENÍ

Předpoklad doby jízdy

32 km ………………………10 minut ……………. 1 minuta = 3,2 km

Skutečnost

2 min = 3km …………… 20 min = 30 km

Poslední dva kilometry jede 5 min

Celkem ve skutečnosti do stanice dojede za 20 min +5 min $= 25\ min$

Zpoždění $\qquad 25\,\text{min}\ (skutečnost) - 10\,\text{min}\ (teoretický\ čas) = \mathbf{15\,min}\ \boldsymbol{zpoždění}$

72. Firma si účtuje za vybavení kanceláře žaluziemi celkem 2 650 Kč. Z dodacího listu je patrné, že žaluzie byly o 954 Kč dražší než jejich instalace. Kolik procent z účtované částky tvoří instalace žaluzií?

ŘEŠENÍ

x … cena instalace

$$x + (x + 954) = 2\,650$$
$$x = 848\ Kč$$
$$\frac{848}{2650} = 0{,}32\ \ldots.\ \mathbf{32}\ \%$$

73. Eva má hotovost 450 000Kč a peněžní ústav ji nabízí roční termínovaný vklad s 3 % roční úrokovou mírou. Před vyzvednutím částky se z úroku odpočítá státem stanovená daň ve výši 15 %. Kolik korun bude z tohoto ročního termínovaného vkladu odvedeno na daních?

ŘEŠENÍ

$$3\ \%\ z\ 450\,000Kč = 13\,500Kč\ (úrok)$$
$$15\ \%\ z\ 13\,500Kč = \mathbf{2\,025Kč}\ (\boldsymbol{odvod\ na\ daních})$$

74. Podle daňového sazebníku platného pro rok 2010 stál výrobek včetně 20% daně 6 000Kč. Kolik korun by stál, pokud by byl zatížen pouze 10% daní?

ŘEŠENÍ

120 % ………………… 6 000Kč

100 % …………………..x Kč

$$\frac{x}{6000} = \frac{100}{120}$$
$$x = \frac{100}{120} * 6000 = 5\,000Kč$$

Výrobek zatížen 10% daní

$$5\,000 + 10\%\ z\ 5\,000 = 5\,000 + 500 = \mathbf{5\,500Kč}$$

75. Do nádrže přitéká voda rychlostí 4,5 l za vteřinu. Nádoba se při této rychlosti přitékání naplní za 75 minut. O kolik litrů se musí změnit objemový průtok, má-li se nádrž naplnit za 50 minut?

ŘEŠENÍ

4,51 / s … 75 minut (4500 s)

x l /s …. 50 minut (3000 s)

$$x = \frac{4\,500}{3\,000} * 4{,}5$$
$$x = 6{,}75\ l/s$$

Objemový průtok se musí změnit o 2,25 l/s.

76. Na rovném úseku trati zvýšil rychlík svoji rychlost o 20% na 90 km/h. Jaká byla jeho rychlost před zrychlením?

ŘEŠENÍ

90 km/h … 120%

x km/h …. 100 %

$$x = \frac{100}{120} * 90 = 75\ km/h$$

77. Pružina se deformovala působením síly o 48 mm, tj. o 25 %. Jaká byla původní délka pružiny a jaká byla délka pružiny po deformaci?

ŘEŠENÍ

48 mm … 25%

Před deformací … 100%

Po deformaci … 75%

1% … $\frac{48}{25} = 1{,}92\ mm$ …. $100\% = 192\ mm$

Před deformací pružinka měřila 192 mm, po deformaci pružinka měřila 1,92 * 75 = 144 mm (případně kontrola 192 – 48 = 144).

78. Maminka dala při nákupu ovoce polovinu všech svých peněz za pomeranče, pětinu za jablka. Jaká část peněz jí zůstala?

ŘEŠENÍ

Množství peněz … x

$\frac{x}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x * \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + \frac{x}{10} = \frac{6}{10}x = \frac{3}{5}x$ … maminka utratila

Mamince zůstala $\frac{2}{5}$ peněz.

79. Frézař vyfrézoval za 3 minuty drážku v součástce. Kolik hodin bude frézovat 5 280 součástek?

ŘEŠENÍ

1 součástka … 3 minuty

5280 součástek … x minut

$$x = \frac{5280}{1} * 3 = 15\,840\ minut = 264\ h$$

80. Počáteční cena akce nejprve klesla o 20% a pak tato nová cena vzrostla o 20%. Výsledná cena akcie je 1 296 Kč. Určete počáteční cenu akce.

ŘEŠENÍ

120% ……………………… 1 296Kč

100% ………………………. x Kč

$$\frac{x}{1296} = \frac{100}{120}$$

$$x = 1\,080\ Kč$$

80% ……………………… 1 080Kč

100% …………………….. x Kč

$$\frac{x}{1080} = \frac{100}{80}$$

$$\boldsymbol{x = 1\,350 Kč}$$